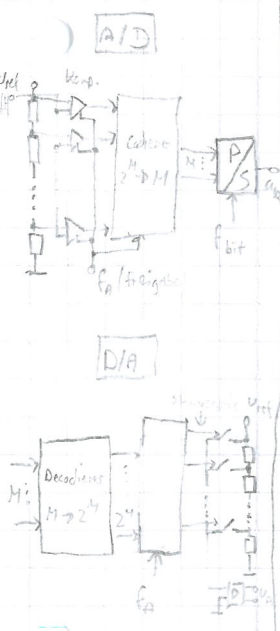


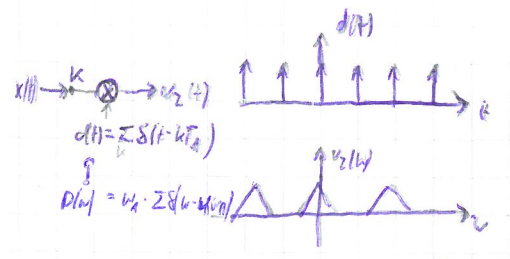
Realisierung



idealer Abtaster

$$u_2(t) = K \cdot x(t) \cdot \sum_k \delta(t - kT_A)$$

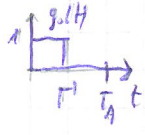
$$u_2(w) = K \cdot \frac{w_A}{2\pi} \sum_k X(w - w_{Ak})$$



Halteschaltung

$$u_3(t) = u_2(t) * g_0(t) = K \cdot \sum_k x_k g_0(t - kT_A) \quad \text{mit } x_k = x(kT_A)$$

$$u_3(w) = u_2(w) \cdot G_0(w) = K \cdot \frac{w_A}{2\pi} G_0(w) \cdot \sum_k X(w - w_{Ak})$$



Quantisierung + Codierung

- x) Q -Kennlinie mit L Stufen; pro Stufe 1 Codewort
 $\rightarrow M = L \cdot d \cdot l$ bit/stufe
- x) Quantisierungsfehler $q_k = x_k - \hat{x}_k$ [bei gleichförmigen Q -gibt: $-\frac{q}{2} \leq q_k \leq \frac{q}{2}$]
 (auch: Q -Rauschen)
- x) Mittlere Leistung: $N_q = E[q_k^2] = \int q_k^2 p(q_k) dq_k$
- x) M Bits \rightarrow 1 Symbol: $b_k \dots b_{k+M} \rightarrow d_k$ (2^M -stufige PAM)
- x) Bitrate $v_B = \frac{1}{T_B} = \frac{M'}{T} = v_S \cdot M' = v_S \cdot L \cdot d \cdot R$
- x) Symbolrate $v_S = \frac{1}{T}$ [Baud-Rate] T ...Symbolintervall
- x) $d_k \rightarrow S(t)$: $u_7'(t) = \sum_k a_k S(t - kT)$ (∞ breites Spektrum \rightarrow Impulsformer)

$$N_q = \frac{q^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{\Delta u_3}{2^M} \right)^2$$

Mapper

Impulsformer

$$u_7(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$$

Empfänger-Seite

$$w(t) = \sum_{\nu} a_{\nu} h(t - \nu T) + r(t) \quad \text{mit } h(t) = g(t) * b(t) * c(t)$$

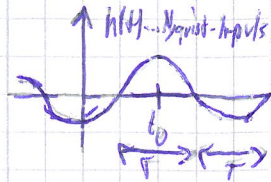
Abtastung bei $t = t_0 + kT$ mit t_0 - mittl. Laufzeit d. Systems

$$\begin{aligned} \hookrightarrow w_k &:= w(t_0 + kT) = \sum_{\nu} a_{\nu} h(t_0 + (k - \nu)T) + r(t_0 + kT) \\ &= \underbrace{a_k h(t_0)}_{\text{Gewichtung}} + \underbrace{\sum_{\nu \neq k} a_{\nu} h(t_0 + (k - \nu)T)}_{\text{ISI}} + \underbrace{r_k}_{\text{Rauschen}} \end{aligned}$$

ISI: 1. Nyquist-Kriterium für Datenübertragung:

$$\sum_{\nu \neq k} a_{\nu} h(t_0 + (k - \nu)T) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow h(t_0 + (k - \nu)T) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq k \\ h(t_0) & \text{für } \nu = k \end{cases}$$



im Weiteren erfüllt $\rightarrow w_k = a_k \cdot h(t_0) + r_k$

Rauschen: *) Gauß'sches Rauschen: *) mittelwertfrei $\rightarrow \bar{n} = E[n] = 0$

$$*) \text{ Varianz: } \text{var}(n) = \sigma^2 = E[(n - \bar{n})^2] = E[n^2]$$

$$*) \text{ WDF: } p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{\sigma})^2}$$

*) Nach TP c(t): *) $S_{rr}(w) = |C(w)|^2 \cdot S_{nn}(w)$... Theorem v. Wiener-Chwintch

$$*) N_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{rr}(w) dw (= 2S_{off} = \sigma^2)$$

Symbolüberw'keit: $P_s = P[a] \cdot Q\left(\frac{E-a}{\sigma}\right) + P[b] \cdot Q\left(\frac{b-E}{\sigma}\right)$

$$\begin{aligned} &\int_a^b p(x) dx \\ &= Q\left(\frac{a}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{b}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Sonderfall: $P(a|b) = P(b|a) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \rightarrow E &= \frac{a+b}{2} \\ \Rightarrow P_s &= Q\left(\frac{b-a}{2\sigma}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{P_{Bk}}{N_T}}\right) \end{aligned}$$

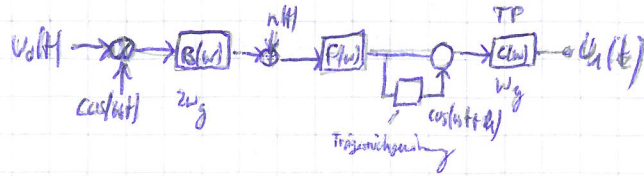
\uparrow
SNR

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$$\begin{aligned} *) Q(-\infty) &= 1 \\ *) Q(0) &= \frac{1}{2} \\ *) Q(\infty) &= 0 \\ *) Q(x) &= \frac{1}{2} (1 - \text{erfc}(\frac{x}{\sqrt{2}})) \end{aligned}$$

mittl. Symbolleistung: $\frac{1}{a_k} = \sum_{\nu} P[a_{\nu}] |a_{\nu}|^2$

Zweiseitenband-AM



* $u_0(t)$, $U_0(w)$ -- band begrenzt

x) $u(t) \leftrightarrow U(w) = \frac{1}{2} [U_0(w - w_c) + U_0(w + w_c)]$

"Spezialfall": $u_0(t)$ reell $\rightarrow U_0(-w) = U_0^*(w)$

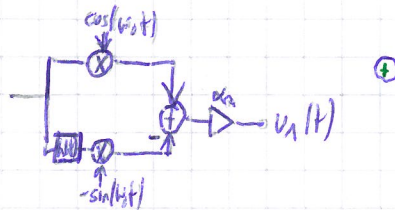
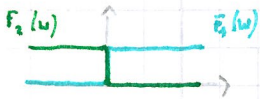
$\rightarrow |U_0(w)|$ gerade

$\arg\{U_0(w)\}$ ungerade

\rightarrow Redundanz



Einseitenband-AM (SSB)



$$U_1(w) = \alpha_A [X(w - w_c) F_1(w - w_c) + X(w + w_c) F_2(w + w_c)]$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha_A}{2} [X(w - w_c) + X(w + w_c)]}_{U_{11}(w)} + \underbrace{\frac{\alpha_A}{2} [X(w - w_c) \operatorname{sgn}(w - w_c) - X(w + w_c) \operatorname{sgn}(w + w_c)]}_{U_{12}(w) \text{ "Korrekturen", das SSB-Signal liefert}}$$

Betrachtung im Zeitbereich

$U_{12}: \frac{1}{j\pi t} \leftrightarrow -\operatorname{sgn}(w)$

Faltungssatz: $x(t) * \left(\frac{1}{j\pi t}\right) \leftrightarrow X(w) \operatorname{sgn} w$

Frequ.-Korrek.-Tab: $-\frac{1}{j} (x(t) * \frac{1}{\pi t}) e^{jw_c t} \leftrightarrow X(w - w_c) \operatorname{sgn}(w - w_c)$

$$\rightarrow U_{12}(t) = \frac{\alpha_A}{2} \left(-\frac{1}{j}\right) \left[\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) e^{jw_c t} - \left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) e^{-jw_c t} \right]$$

$$= \alpha_A \left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) \sin(w_c t)$$

$U_{11}: U_{11}(t) = \alpha_A \cdot x(t) \cdot \cos w_c t$

$\rightarrow U_1(t) = \alpha_A [x(t) \cos w_c t - \hat{x}(t) \sin w_c t]$ mit $\hat{x}(t) := x(t) * \frac{1}{\pi t}$ \uparrow Hilberttransformation

Hilberttransformation
(Math. Betrachtung)

$z_1(t) \in \mathbb{C} \rightarrow z_1(w) = 0 \quad \forall w < 0$

$E_1(w) = X(w) \cdot \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} w) = \frac{1}{2} [X(w) + j X(w) \frac{\operatorname{sgn} w}{j}]$

$\rightarrow z_1(t) = \frac{1}{2} [x(t) + j \hat{x}(t)]$

$X(w) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
 $\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{j \operatorname{sgn}(w) X(w)\}$
(Re u. Im sind über Hilbert-Trans. verknüpft)



$u(t) = \frac{1}{2} [x(t) + j \hat{x}(t)] e^{jw_c t}$

$\operatorname{Re}\{u(t)\} = \frac{1}{2} x(t) \cos w_c t - \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin w_c t$

$\rightarrow u_1(t) = \alpha_A [x(t) \cos w_c t - \hat{x}(t) \sin w_c t]$

QAM

mit reellwertigen Fkt.:

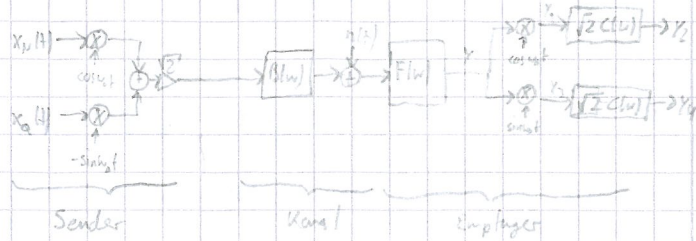
$$v(t) = \sqrt{2} [x_N(t) \cos \omega_c t - x_Q(t) \sin \omega_c t]$$

Normalkomponente Quadraturkomponente → Bandbegrenzt mit ω_c

$$x_N = \sum_k \operatorname{Re}\{a_k\} g(t-kT)$$

$$x_Q = \sum_k \operatorname{Im}\{a_k\} g(t-kT)$$

Übertragung



TP $C(w)$:

$B(w)$:

$F(w) = B(w)$ (zur Bandbegrenzung d. Rauschens)

Rauschfreier Fall

$$y_1(t) = \sqrt{2} v(t) \cos \omega_c t$$

$$= \sqrt{2} x_N(t) \cos^2 \omega_c t - x_Q(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} x_N(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} x_N(t) \cos 2\omega_c t - \frac{\sqrt{2}}{2} x_Q(t) \sin 2\omega_c t$$

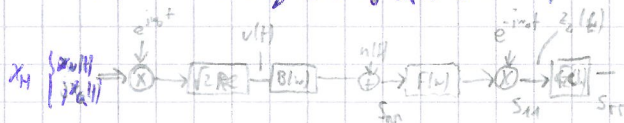
werden durch $C(w)$ gefiltert

$$\rightarrow y_2(t) = x_N(t)$$

$$\text{analog: } y_3(t) = x_Q(t)$$

komplexe Darstellung

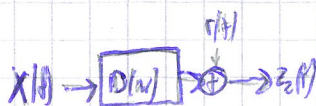
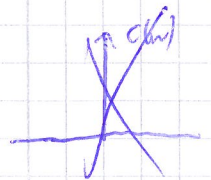
$$v(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ [x_N(t) + j x_Q(t)] e^{j \omega_c t} \}$$



Äquivalenter TP-Kanal

$$v(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [x_H(t) e^{j \omega_c t} + x_H^*(t) e^{-j \omega_c t}]$$

$$v(w) = \frac{\sqrt{2}}{2} [x_H(w - \omega_c) + x_H^*(-w - \omega_c)]$$



äquivalenter TP

1. Rauschfreier Fall: $z_2(w) = v(w + \omega_c) \cdot B(w + \omega_c) \cdot \sqrt{2} \cdot C(w)$

$$= x_H(w) \cdot \frac{B(w + \omega_c) C(w)}{D(w)}$$

$D(w) = \frac{z_2(w)}{x_H(w)}$... V-Fkt. d. äquiv. TP

$$D(w) \leftrightarrow d(t) = (h(t) e^{-j \omega_c t}) * c(t)$$

2. Betrachtung d. Rauschens:

$$S_{n1} = S_{n0}(w + \omega_c)$$

$$S_{nr} = S_{n1} |\sqrt{2} C(w)|^2$$

mittl. Leistung: $N_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nr}(w) dw$

Musterfkt: $r(t) = (n(t) e^{-j \omega_c t}) * c(t)$

QAM (digital)

komplexe Signale: $a_k = \text{Re}\{a_k\} + j \text{Im}\{a_k\}$

$\rightarrow \boxed{a_k} \rightarrow \boxed{g(t)} \rightarrow \sum a_k g(t-kT) = x_H(t)$

$x_c(t) = x_H(t) \cdot e^{j\omega_c t}$

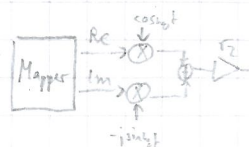
$x(t) = \sqrt{2} \text{Re} [e^{j\omega_c t} \sum_k a_k g(t-kT)]$

$|x(t)| = \sqrt{2} \sqrt{x_H^2 + x_A^2}$

$\varphi(t) = \arctan \frac{x_A}{x_H}$

reelle Signale: $x(t) = \sqrt{2} \left(\left[\sum_k \text{Re}\{a_k\} g(t-kT) \right] \cos \omega_c t - \sum_k \text{Im}\{a_k\} g(t-kT) \right] \sin \omega_c t$

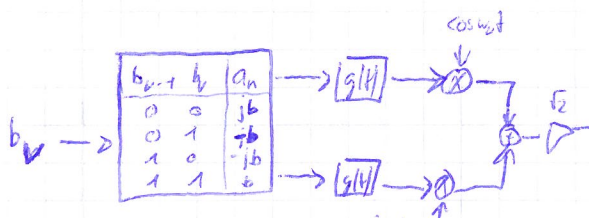
Realisierung:



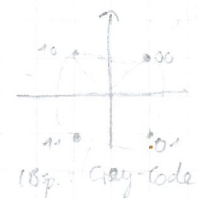
Konstellationsdiagramm: Mapper: M' aufeinanderfolgende Symbole $\rightarrow a_k$

$\rightarrow L = 2^{M'}$ versch. Symbole a_k

PSK z.B. L=4 (QPSK), $M'=2$



b_{k-1}	b_k	a_k	φ_k
0	0	$j b$	$\pi/2$
0	1	$-b$	π
1	0	$-j b$	$3\pi/2$
1	1	b	0



$x_H(t) = x_H(t) + j x_A(t)$

bzw.



allg. L-PSK: $\varphi_k = k \frac{2\pi}{L}$

Festlegung d. Signalpunkte

- 1> Bitrate: $r_B = r_s \cdot L$
- 2> Abstand d. Signalpunkte groß $\rightarrow P_s$ klein
- 3> Jeder Pkt. trägt zur mittl. Leistung bei \rightarrow mittl. Sendeleistung groß
- \rightarrow SMR groß $\rightarrow P_s$ klein
- (aber: Gesamtsendeleistung begrenzt $\rightarrow |a_k| \rightarrow \infty$ unerwünscht)

Empfänger

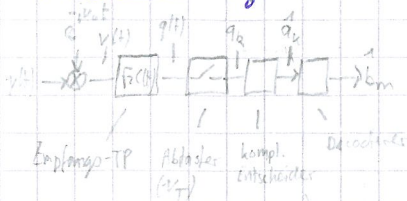
kompl. Hüllkurve $x_H(t) = \sum_k a_k g(t-kT)$

nach äqu. TP-Modell: $y(t) = \sum_k a_k h(t-kT) + r(t)$

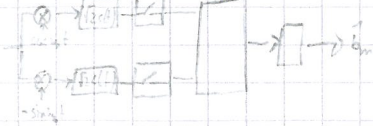
$\rightarrow a_k = a_k h(t_k) + \sum_{v \neq k} a_v h_{k-v} + r_k$

Zeitchkanaler äquiv. TP-Kanal

komplexe Signalverarbeitung



reelle Signalverarbeitung



Betrachtung d. Rauschens

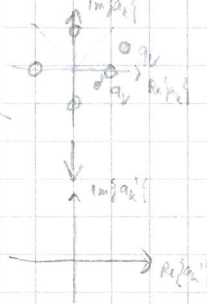
$$\begin{aligned} n(t) &= n_v(t) \cos \omega_c t - n_q(t) \sin \omega_c t \\ E[n^2(t)] &= E[n_v^2(t)] + E[n_q^2(t)] \\ E[n(t)] &= E[n_v(t)] = E[n_q(t)] = 0 \\ r(t) &= \sqrt{2} (n(t) e^{j\omega_c t}) * c(t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} [n_v(t) + j n_q(t)] * c(t) \\ E[r^2(t)] &= \frac{1}{2} (E[n_v^2] + E[n_q^2]) \end{aligned}$$

Abtastung: $r_k = \frac{\sqrt{2}}{2} [n_{v,k} + j n_{q,k}]$

Symbolfehler-W'keit

Bsp 4-QAM

Entscheidungs-Schwelle



$$q_v = a_v + r_v \quad (|s|=0)$$

Drehung um $\frac{\pi}{4} \hat{=} e^{j\pi/4}$

$$\frac{q_v e^{j\pi/4}}{a_v} = \frac{a_v e^{j\pi/4}}{a_v} + \frac{r_v e^{j\pi/4}}{a_v} \quad (\text{WDF, } E[\cdot], \text{ m.H. ändern sich nicht})$$

$$P_{a_v} = P[\text{Re}\{a_v\} > 0 \text{ and } \text{Im}\{a_v\} > 0] \quad \text{-- Symbolfehler-W'keit}$$

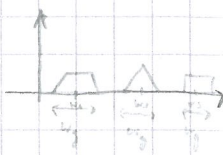
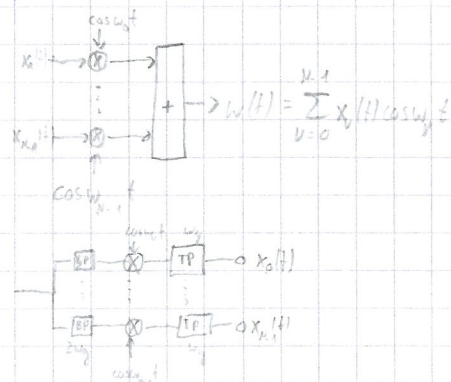
$$P_{Sav} = 1 - P_{a_v}$$

mittlere $\sim P_s = 1 - P_{a_v} = 2Q\left(\frac{\text{Re}\{a_v\}}{\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{\text{Re}\{a_v\}}{\sigma}\right)$

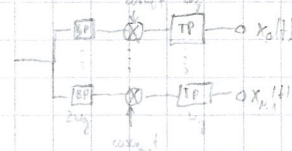
$\sigma^2 = \text{Varianz von } \text{Re}\{a_v\}$
 $\sigma_a^2 = 2\sigma^2 = \text{Varianz von } a_v$

Mehrfachzug-Kabeln

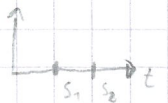
Frequenzmultiplex (FDM) Modulation:



Demodulation



alternativ: time division multiplex (TDM)



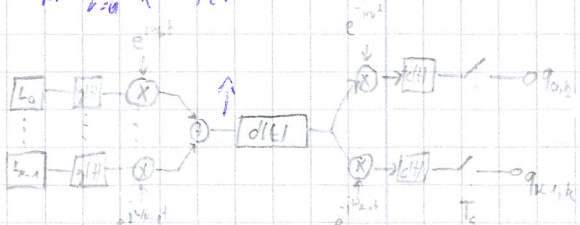
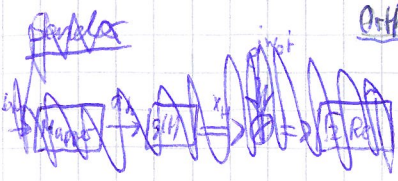
$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{n-1} a_{k,n} g(t - nT_s) e^{j\omega_k t}$$

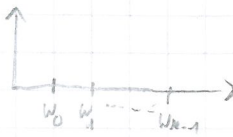
Orthogonales Frequenz-Multiplex (OFDM)

zeitkontinuierlich:

$$q_m(t) = \sum_k \sum_{n=0}^{n-1} a_{k,n} g_{k,m}(t - nT_s) e^{j(\omega_k - \omega_m)t}$$

mit $g_{k,m}(t - nT_s) = [g(t - nT_s)] e^{j(\omega_k - \omega_m)(t - nT_s)}$ \downarrow L_m-stages GPH $g_m = d(t) e^{j\omega_m t} * c(t)$





$$\Delta\omega = \Delta\omega \cdot N$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega_1 t} = \delta_{\omega_0, \omega_1}$$

$\omega_{HF} = 0 \rightarrow$ Digital Multitone (DMT)

$\omega_{HF} \neq 0 \rightarrow$ OFDM

2>2-Digitalisierung:

Abtastung aller Signale:

$$e^{j\omega_0 nT} = e^{j\Delta\omega nT}$$

$$s(nT) \leadsto s_n$$

$$\omega(nT) \leadsto \omega_n$$

$$a(nT) \leadsto a_n$$

$$c(nT) \leadsto c_n$$

Festlegung: $g(f), c(f), \{rect(f)\}$
(bei FDM/OFDM)

$$s_n = \sum_{v=0}^{N-1} a_{v,n} e^{j\Delta\omega v n}$$

\approx FFT

$$\text{mit } \Delta\omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\rightarrow s_n = \sum_{v=0}^{N-1} z_{v,n} e^{j\frac{2\pi}{N}vn}$$

$$n = 0, \dots, N-1$$

mit $z_{v,n} = a_{v,k} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \rightarrow$ Rechteckimpuls
mit Höhe $\frac{1}{\sqrt{N}}$

(im Empfänger: FFT)

Weitere Mgl.: $e^{j\frac{2\pi}{N}vn} = e^{j\frac{2\pi}{N}v(n+M)}$ periodisch mit M

$$\rightarrow s_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=0}^{N-1} a_{v,k} e^{j\frac{2\pi}{N}vn} \equiv s_{n \bmod M, k}$$

$$\rightarrow \text{blockweise Betrachtung: } \underline{s}_k = \begin{bmatrix} s_{0,k} \\ \vdots \\ s_{M-1,k} \end{bmatrix}, \underline{a}_k = \begin{bmatrix} a_{0,k} \\ \vdots \\ a_{N-1,k} \end{bmatrix}$$